GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

Nếu hệ có một trong hai phương trình ta dưa về dạng : f(x)=f(y) với x,y thuộc T thì khi đó ta khảo sát một hàm số đặc trưng : y=f(t) trên T . Nếu f(t) là đơn điệu thì để f(x)=f(y) chỉ xảy ra khi x=y . Trong phương pháp này khó nhất là các em phải xác định được tập giá trị của x và y , nếu tập giá trị của chúng khác nhau thì các em không được dùng phương pháp trên mà phải chuyển chúng về dạng tích : f(x)-f(y)=0 hay : (x-y).A(x;y)=0

Khi đó ta xét trường hợp : x=y , và trường hợp A(x,y)=0 .

Sau đây là một số bài mà các em tham khảo .

Bài 1 Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} 2x^2y+y^3=2x^4+x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2 \end{cases}$

. - Phương trình (1) khi x=0 và y=0 không là nghiệm (do không thỏa mãn (2)).

- Chia 2 vế phương trình (1) cho $x^3\neq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^3=2x+x^3$

- Xét hàm số : $f(t)=2t+t^3 \Rightarrow f'(t)=2+3t^2>0 \forall t\in R$. Chứng tỏ hàm số f(t) đồng biến . Để phương trình có nghiệm thì chỉ xảy ra khi : $\frac{y}{x}=x \Leftrightarrow y=x^2$. -thay vào (2) :

$(x+2)\sqrt{x^2+1}=(x^2+1+2x) \Leftrightarrow t^2-(x+2)t+2x=0 \Rightarrow t=2; t=x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+1}=2 \Rightarrow x^2=3 \leftrightarrow x=\pm\sqrt{3} \\ \sqrt{x^2+1}=x \Rightarrow x\in\varnothing \end{array}\right..$$

Do đó hệ có hai nghiệm : (x;y)=$\left(-\sqrt{3};3\right),\left(\sqrt{3};3\right)$

Bài 2. Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} 2+6y=\frac{x}{y}-\sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 \end{cases}$.

Giải

$$\begin{cases} 2+6y=\frac{x}{y}-\sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-y\sqrt{x-2y}-6y^2=0 \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x-2y}+2y\right)\left(\sqrt{x-2y}-3y\right)=0 \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 \end{cases}$$

- Trường hợp 1: $\sqrt{x-2y}=-2y \Leftrightarrow \begin{cases} y\le 0 \\ x-2y=4y^2 \end{cases}$.

Thay vào (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x-2y}=4y^2+5y-2 \Leftrightarrow -2y=4y^2+5y-2 \Rightarrow 4y^2+7y-2=0$

- Trường hợp : $\sqrt{x-2y}=3y \Rightarrow \begin{cases} y\ge 0 \\ x-2y=9y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0 \\ x=9y^2+2y \end{cases} (*)$.

Thay vào (2) : $\Leftrightarrow \sqrt{9y^2+2y+3y}=9y^2+2y+3y-2 \Leftrightarrow \sqrt{9y^2+5y}=9y^2+5y-2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{9y^2+5y}\ge 0 \\ t^2-t-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ \sqrt{9y^2+5y}=2 \end{cases} \Rightarrow 9y^2+5y-4=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \to x=9-2=7 \\ y=\frac{4}{9} \to 9\frac{16^2}{91}+2.\frac{4}{9}=\frac{264}{9}=\frac{88}{3} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm : $(x;y)=(7;-1),\left(\frac{88}{3};\frac{4}{9}\right)$

Bài 3 Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} x^2+y^2+\frac{2xy}{x+y}=1 \\ \sqrt{x+y}=x^2-y \end{cases}$

Giải

a. $\begin{cases} x^2+y^2+\frac{2xy}{x+y}=1(1) \\ \sqrt{x+y}=x^2-y(2) \end{cases}$. Từ (2) viết lại : $\sqrt{x+y}+x+y=x^2+x \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+y}\right)^2+\sqrt{x+y}=x^2+x$

Ta xét hàm số f(t)=$t^2+t\,(t\ge 0)\Rightarrow f'(t)=2t+1>0 \vee t\ge 0$. Chứng tỏ f(t) là một hàm số đồng biến , cho nên ta có : $\sqrt{x+y}=x \Leftrightarrow y=x^2-x$. (*)

Thay vào (1) : $\Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{2xy}{x^2}=1 \Leftrightarrow x^2+\left(x^2-x\right)^2+\frac{2x\left(x^2-x\right)}{x^2}=1 \Leftrightarrow x^2-1+x^2(x-1)^2+2(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x+1+x^2(x-1)+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^3-x^2+x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ (x+1)\left(x^2-2x+3\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.(**)$

Thay vào (*) : $\Leftrightarrow y=x^2-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1;y=2 \\ x=1;y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x;y)=(1;2),(1;0)$

Bài 4. Giải hệ phương trinh : $\begin{cases} 2^{x^2+1}-4^{8y^2+\frac{1}{2}}=3\left(2\sqrt{y}-\sqrt{x}\right) \\ 2^{(x+y)^2}+\frac{3}{2}\sqrt{x+y}=\frac{7}{2} \end{cases}$

Từ . $\begin{cases} 2^{x^2+1}-4^{8y^2+\frac{1}{2}}=3\left(2\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)(1) \\ 2^{(x+y)^2}+\frac{3}{2}\sqrt{x+y}=\frac{7}{2} \quad (2) \end{cases}$. - Điều kiện : $x,y\ge 0$ - Từ (1) : $\Leftrightarrow 2.2^{(\sqrt{x})^4}+3\sqrt{x}=2.2^{(2\sqrt{y})^4}+3\left(2\sqrt{y}\right)$

- Xét hàm số : $f(t)=2.t^4+3t\,(t\ge 0)\Rightarrow f'(t)=8t^3+3>0$. Chứng tỏ f(t) luôn đồng biến .

Do vậy để phương trình (1) có nghiệm chỉ khi : $\sqrt{x}=2\sqrt{y} \Leftrightarrow x=4y \quad (*)$

- Thay vào (2) : $2^{(\sqrt{5y})^4}+\frac{3}{2}\left(\sqrt{5y}\right)=\frac{7}{2}$. Xét hàm số : f(t)= $2^{t^4}+\frac{3}{2}t \Rightarrow f'(t)=4t^3.2^{t^4}+\frac{3}{2}>0$.

- Nhận xét : f(1)=2+$\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$. Suy ra t=1 là nghiệm duy nhất . $\Leftrightarrow \begin{cases} x=4y \\ \sqrt{5y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{5} \\ x=\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=\left(\frac{4}{5};\frac{1}{5}\right)$

Bài 5. Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1 \\ x\sqrt{6x-2xy+1}=4xy+6x+1 \end{cases}$

Từ :. $\begin{cases} \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1 \\ x\sqrt{6x-2xy+1}=4xy+6x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\left(-y+\sqrt{1+(-y)^2}\right) \\ x\sqrt{6x-2xy+1}=4xy+6x+1 \end{cases}$. (nhân liên hợp)

Xét hàm số : $f(t)=t+\sqrt{1+t^2}\Rightarrow f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{t^2+1}}>\dfrac{|t|+t}{\sqrt{1+t^2}}\ge 0\forall t\in R$

Chứng tỏ hàm số đồng biến . Để f(x)=f(-y) chỉ xảy ra x=-y (*)

- Thay vào phương trình (2) :

$$x\sqrt{6x+2x^2+1}=-4x^2+6x+1\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x^2+6x+1}-\frac{x}{2}\right)^2=\frac{25}{4}x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2+6x+1}=3x\\ \sqrt{2x^2+6x+1}=-2x\end{array}\right.$$

* Trường hợp : $\sqrt{2x^2+6x+1}=3x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 2x^2+6x+1=9x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 7x^2-6x-1=0\end{cases}\Rightarrow x=1;y=-1$

* Trường hợp : $\sqrt{2x^2+6x+1}=-2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ 2x^2+6x+1=4x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ 2x^2-6x-1=0\end{cases}$

$\to x=\dfrac{3-\sqrt{11}}{2};y=\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}$. Vậy hệ có hai nghiệm : (x;y)=(1;-1),($\dfrac{3-\sqrt{11}}{2};\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}$)

Bài 6 Giải hệ phwpng trình : $\begin{cases}\left(4x^2+1\right)x+\left(y-3\right)\sqrt{5-2y}=0\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7\end{cases}$

Giải

Từ : . $\begin{cases}\left(4x^2+1\right)x+\left(y-3\right)\sqrt{5-2y}=0(1)\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7\qquad(2)\end{cases}$ (KA-2011)

- PT(1): $4x^3+x=-\left(y-3\right)\sqrt{5-2y}\,(3)$. Đặt $t=\sqrt{5-2y}\Rightarrow y=\dfrac{5-t^2}{2}\Leftrightarrow-\left(\dfrac{5-t^2}{2}-3\right)t=\dfrac{t^3+t}{2}$

- Khi đó (2) : $4x^3+x=\dfrac{t^3+t}{2}\Leftrightarrow\left(2x\right)^3+2x=t^3+t$

- Xét hàm số : f(u)=$u^3+u\Rightarrow f'(u)=3u^2+1>0\forall u$ suy ra f(u) luôn đồng biến . Do đó để f(x)=f(t) chỉ xảy ra khi : 2x=t $\Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow 4x^2=5-2y\Leftrightarrow 2y=5-4x^2\,(4)$

- Thay vào (2) : $g(x)=4x^2+\left(\dfrac{5-4x^2}{2}\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7=0\quad :x\in\left[0;\dfrac{3}{4}\right]$.Ta thấy x=0 và x=$\dfrac{3}{4}$ không là nghiệm . g'(x)=$8x-8x\left(\dfrac{5}{2}-2x^2\right)-\dfrac{4}{\sqrt{3-4x}}=4x\left(4x^2-3\right)-\dfrac{4}{\sqrt{3-4x}}<0\forall x\in\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$

- Mặt khác : $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ là nghiệm duy nhấy , thay vào (4) tìm được y=2.

- Vậy hệ có nghiệm duy nhất : $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{1}{2};2\right)$

Bài 7. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}2\left(2x+1\right)^3+2x+1=\left(2y-3\right)\sqrt{y-2}\\ \sqrt{4x+2}+\sqrt{2y+4}=6\end{cases}$

Giải :

Từ :. $\begin{cases}2\left(2x+1\right)^3+2x+1=\left(2y-3\right)\sqrt{y-2}\,(1)\\ \sqrt{4x+2}+\sqrt{2y+4}=6\qquad(2)\end{cases}$

- Điều kiện : $y\ge 2;x\ge-\dfrac{1}{2}(*)$

- Đặt : Từ (2) : $4x+2y+6=36 \Leftrightarrow 2x+y=15 \Rightarrow 2x+1=16-y$
- Từ (1):Đặt : $\sqrt{y-2}=t \Rightarrow y=t^2+2 \Leftrightarrow 2y-3=2\left(t^2+2\right)-3=2t^2+1$
- Cho nên vế phải (1) : $\Leftrightarrow \left(2t^2+1\right)t=2t^3+t \Leftrightarrow (1): 2\left(x+1\right)^3+\left(2x+1\right)=2t^3+t$
- Xét hàm số : $f(u)=2u^3+u \Rightarrow f'(u)=2u^2+1>0 \forall u \in R$. Chứng tỏ hàm số luôn đồng biến . Để f(x)=f(t) chỉ xảy ra khi : x=t

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\sqrt{y-2} \\ 2x+y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\sqrt{y-2} \\ 15-y=\sqrt{y-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 15 \\ y^2-31y+227=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{31-\sqrt{53}}{2} \\ y=\dfrac{31+\sqrt{53}}{2}>15 \end{array}\right.$$

- Vậy hệ có nghiệm : $(x;y)=\left(\dfrac{\sqrt{53}-1}{4};\dfrac{31-\sqrt{53}}{2}\right)$

Bài 8 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2\left(x^3+2x-y-1\right)=x^2\left(y+1\right)(1) \\ y^3+4x+1+\ln\left(y^2+2x\right)=0(2) \end{cases}$

Từ : . $\begin{cases} 2\left(x^3+2x-y-1\right)=x^2\left(y+1\right)(1) \\ y^3+4x+1+\ln\left(y^2+2x\right)=0(2) \end{cases}$

- Điều kiện : $y^2+2x>0(*)$
- Phương trình (1) : $\Leftrightarrow 2\left(x^3+2x\right)=2\left(y+1\right)+x^2\left(y+1\right) \Leftrightarrow 2x\left(x^2+2\right)=\left(y+1\right)\left(x^2+2\right)$
- Do : $x^2+2>0 \Rightarrow 2x=y+1(**)$
- Thay vào (2) : $y^3+2\left(y+1\right)+1+\ln\left(y^2+y+1\right)=0 \Leftrightarrow f(y)=y^3+2y+3+\ln\left(y^2+y+1\right)=0$
-Ta có : $f'(y)=3y^2+2+\dfrac{2y+1}{y^2+y+1}>0$. Chứng tỏ hàm số luôn đồng biến .
- Mặt khác : f(-1)=0 , do đó phương trình có nghiệm duy nhất : (x;y)=(0;-1)

Bài 9 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} (8x-3)\sqrt{2x-1}-y-4y^3=0 \\ 4x^2-8x+2y^3+y^2-2y+3=0 \end{cases}$

Giải

Từ : . $\begin{cases} (8x-3)\sqrt{2x-1}-y-4y^3=0 \quad (1) \\ 4x^2-8x+2y^3+y^2-2y+3=0(2) \end{cases}$

- Điều kiện : $x \ge \dfrac{1}{2}$.
- Từ (1) : $(8x-3)\sqrt{2x-1}=y+4y^3(*)$
- Đặt : $t=\sqrt{2x-1} \Rightarrow 2x=t^2+1 \Leftrightarrow (8x-3)\sqrt{2x-1}=\left[4\left(t^2+1\right)-3\right]t=\left(4t^2+1\right)t=4t^3+t$
- Do đó (*) : $4t^3+t=4y^3+y$
- Xét hàm số : f(u)= $4u^3+u \Rightarrow f'(u)=12u^2+1>0 \forall u \in R$. Chứng tỏ hàm số đồng biến . Do đó phương trình có nghiệm khi : f(t)=f(y) $\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=y \Leftrightarrow 2x=y^2+1(**)$
- Thay vào (2) : $\left(y^2+1\right)^2-4\left(y^2+1\right)+2y^3+y^2-2y+3=0 \Leftrightarrow y^4+2y^3-y^2-2y=0$

$$\Leftrightarrow y\left(y^3+2y^2-y-2\right)=0 \Leftrightarrow y\left(y-1\right)\left(y^2+3y+2\right)=0 \Leftrightarrow y\left(y-1\right)\left(y+2\right)\left(y+1\right)=0$$

- Vậy : $\begin{cases} y=0 \\ 2x=y^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases} \to (x;y)=\left(\dfrac{1}{2};0\right), \begin{cases} y=0 \\ 2x=y^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases} \to (x;y)=(1;1)$

$\begin{cases} y=-1 \\ 2x=y^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases} \to (x;y)=(1;0), \begin{cases} y=-2 \\ 2x=y^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=\dfrac{5}{2} \end{cases} \to (x;y)=\left(\dfrac{5}{2};-2\right)$

Bài 10. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^y = -xy - \dfrac{3}{2} \\ \left(x^2y+2x\right)^2 - 2x^2y + 1 - 4x = 0 \end{cases}$

Giải :

Từ : . $\begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^y = -xy - \dfrac{3}{2} \quad (1) \\ \left(x^2y+2x\right)^2 - 2x^2y + 1 - 4x = 0 (2) \end{cases}$

- Từ (2) : $\left(x^2y+2x\right)^2 - 2\left(x^2y+2x\right)+1=0 \Leftrightarrow \left[\left(x^2y+2x\right)-1\right]^2=0 \Rightarrow x^2y+2x=1 \Leftrightarrow x^2y=1-2x$

- Hay : $\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{1-2x}{x^2} (*) \\ xy=\dfrac{1-2x}{x} \end{array}\right.$, thay vào (1) : $2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^{\frac{1-2x}{x^2}} = -\left(\dfrac{1-2x}{x}\right) - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x}$ (3)

- Nhận xét : $\dfrac{1-2x}{x^2} - \dfrac{1-x^2}{x^2} = \dfrac{x^2-2x}{x^2} = 1 - \dfrac{2}{x} = 2\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x}\right)$.

Gọi : $a=\dfrac{1-x^2}{x^2}, b=\dfrac{1-2x}{x^2} \Rightarrow b-a=2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}\right)$

- Cho nên (3) $\Leftrightarrow 2^a - 2^b = 2(b-a) \Leftrightarrow 2^a + 2a = 2^b + 2b$.

- Xét hàm số : f(t)= $2^t + 2t \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 + 2 > 0 \forall t \in R$. Hàm số đồng biến , vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi : a=b , tức b-a=0 , hay : $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Thay vào (*) ta tìm được

y= $-\dfrac{3}{4} \Rightarrow (x;y) = \left(2;-\dfrac{3}{4}\right)$

Bài 11 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3 - 2y + 1 = 0 \\ (3-x)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0 \end{cases}$

Giai

Đ/K : $x \le 2; y \ge \dfrac{1}{2}$.

Từ (2) $\left[1+(2-x)\right]\sqrt{2-x} = \left[1+(2y-1)\right]2y\sqrt{2y-1} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2-x}\right)^3 + \sqrt{2-x} = \left(\sqrt{2y-1}\right)^3 + \sqrt{2y-1}$

Ta xét hàm số : $f(t) = t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in R$. Chứng tỏ hàm số luôn đồng biến trên R

Do đó để $f\left(\sqrt{2-x}\right) = f\left(\sqrt{2y-1}\right)$, chỉ xảy ra khi : $\sqrt{2-x} = \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2y = 3-x \\ x = 3-2y \end{array}\right.$

Thay vào (1) $\Leftrightarrow x^3 - (3-x) + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+2\right) = 0 \Rightarrow x = 1; y = 3 - 1 = 2$

Vậy hệ có nghiệm (x;y)=(1;2)

Bài 12 . Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2y-2x^2-2y^2+5y-2=0 \\ \sqrt{y^2+1}+\sqrt{x-y}=2xy-x^2+\sqrt{x^2-2xy+y^2+1}+\sqrt{y} \end{cases}$

Giải

Đ/K : $x-y\ge 0; y\ge 0 \Leftrightarrow x\ge y\ge 0$

Từ (2) : $\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x-y}-y^2=-y^2+2xy-x^2+\sqrt{(x-y)^2+1}+\sqrt{y} \Leftrightarrow$

$\sqrt{y^2+1}-\sqrt{y}-y^2=+\sqrt{(x-y)^2+1}-\sqrt{x-y}-(x-y)^2$

Xét hàm số : $f(t)=\sqrt{t^2+1}-\sqrt{t}-t^2 \quad (t\ge 0)\Rightarrow f'(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}-\frac{1}{2\sqrt{t}}-2t=t\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}-2\right)-\frac{1}{2\sqrt{t}}<0$

(Vì : $\sqrt{t^2+1}\ge 1\Rightarrow 0\le \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\le 1\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}-2<0$ với mọi t>0)

Như vậy hệ có nghiệm chỉ xảy ra khi : $y=x-y$ hay x=2y .

Thay vào (1) : $(2y)^2y-2(2y)^2-2y^2+5y-2=0 \Leftrightarrow 4y^3-10y^2+5y-2=0$

$\Leftrightarrow (y-2)(4y^2-2y+1)=0 \Leftrightarrow y=2$ vì : $4y^2-2y+1=0$ vô nghiệm .

Vậy hệ có nghiệm : (x;y)=(4;2)

Bài 13. Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} 2(x-2)\sqrt{x+6}=6-y \\ (x-2)\sqrt{y+2}=\sqrt{y+1}.\sqrt{x^2-4x+5} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y\ge -2; x\ge -6$

Từ (2) : $(x-2)\sqrt{y+2}=\sqrt{y+1}.\sqrt{x^2-4x+5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y+2}}{\sqrt{y+1}}=.\frac{\sqrt{(x-2)^2+1}}{(x-2)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y+2}{y+1}}=.\sqrt{\frac{(x-2)^2+1}{(x-2)^2}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(y+1)+1}{y+1}}=.\sqrt{\frac{(x-2)^2+1}{(x-2)^2}}$. Xét hàm số $f(t)=\sqrt{\frac{t+1}{t}} \quad (t>0)\Rightarrow f'(t)=\left(\sqrt{1+\frac{1}{t}}\right)'=-\frac{1}{2t^2\sqrt{1+\frac{1}{t}}}<0$.

Chứng tỏ hàm số nghịch biến

Để $f(x-2)^2=f(y+1)$ chỉ xảy ra khi : $y+1=(x-2)^2$. Thay vào (1) ta được phương trình :

$(1)\Leftrightarrow (x-2)^2+2(x-2)\sqrt{x+6}-7=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=x-2\ge 0 \\ t^2+2t\sqrt{t+8}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=x-2\ge 0 \\ 2t\sqrt{t+8}=7-t^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t=x-2\le \sqrt{7} \\ 4t^2(t+8)=(7-t^2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t=x-2\le \sqrt{7} \\ t^4-4t^3-46t^2+49=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t=x-2\le \sqrt{7} \\ (t-1)(t^3-3t^2-49t-49)=0 \end{cases}$

+/ Trường hợp : t=1 hay x-2=1 suy ra x=3 và y+1=1 hay y=0 . Vậy nghiệm hệ là (x;y)=(3;0)

+/ Trường hợp : $f(t)=t^3-3t^2-49t-49=0 \Rightarrow f'(t)=3t^2-6t-49=3(t-1)^2-52<0 \forall t\in\left[0;\sqrt{7}\right]$

Hàm số nghịch biến và f(o)= -49<0 chứng tỏ f(t)<0 với mọi $t\in\left[0;\sqrt{7}\right]$. Phương trình vô nghiệm .

Bài 14. Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} 2y(4y^2+3x^2)=x^4(x^2+3) \\ 2012^x\left(\sqrt{2y-2x+5}-x+1\right)=4024 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $2y-2x+5\ge 0$

+/ Nếu x=0 suy ra y=0 nhưng lại không thỏa mãn (2) vậy x khác 0 . Từ (1(chia hai vế cho $x^2\ne 0$
Khi đó :

$$(1)\Leftrightarrow \frac{2y\left(4y^2+3x^2\right)}{x^3}=\frac{x^4\left(x^2+3\right)}{x^3}\Leftrightarrow \left(\frac{2y}{x}\right)\left[\left(\frac{2y}{x}\right)^2+3\right]=x^3+3x\Leftrightarrow \left(\frac{2y}{x}\right)^3+3\left(\frac{2y}{x}\right)=x^3+3x$$

Xét hàm số : $f(t)=t^3+3t\Rightarrow f'(t)=3t^2+3>0$ với mọi t thuộc R . Chứng tỏ hàm số đồng biến

Để $f(\frac{2y}{x})=f(x)$, chỉ xảy ra khi : $\frac{2y}{x}=x\Leftrightarrow 2y=x^2$. Thay vào (2) ta được :

$$(2)\Leftrightarrow 2012^x\left(\sqrt{x^2-2x+5}-x+1\right)=4024\Leftrightarrow 2012.2012^{x-1}\left(\sqrt{\left(x-1\right)^2+4}-\left(x-1\right)\right)=4024$$

Lại đặt t=x-1 suy ra : $\Leftrightarrow 2012.2012^t\left(\sqrt{t^2+4}-t\right)=4024\Leftrightarrow g(t)=2012^t\left(\sqrt{t^2+4}-t\right)=2$

Lại xét hàm số : $g(t)=2012^t\left(\sqrt{t^2+4}-t\right)\Rightarrow g'(t)=2012^t\ln 2012\left(\sqrt{t^2+4}-t\right)+2012^t\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}-1\right)$

Hay : $g'(t)=2012^t\left(\sqrt{t^2+4}-t\right)\left[\ln 2012-\frac{1}{\sqrt{t^2+4}}\right]$

Vì : $\sqrt{t^2+4}-t>0$ và $\frac{1}{\sqrt{t^2+4}}<1<\ln 2012$ suy ra g'(t)>0 với mọi t thuộc R mà g(0)=2 cho nên với t=0 là nghiệm duy nhất và : $t=x-1=0\Rightarrow x=1; y=\frac{1}{2}\Leftrightarrow (x;y)=\left(1;\frac{1}{2}\right)$

Bài 15. Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} x^3-12x-y^3+6y^2-16=0\\ 4x^2+2\sqrt{4-x^2}-5\sqrt{4y-y^2}+6=0\end{cases}$

Giải

Điều kiện : $-2\le x\le 2; 0y\le 4$. Khi đó hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-12x=\left(y-2\right)^3-12\left(y-2\right)\\ 4x^2+2\sqrt{4-x^2}-5\sqrt{4y-y^2}+6=0\end{cases}$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3-12t \quad t\in\left[-2;2\right]\Rightarrow f'\left(t\right)=3t^2-12=3\left(t^2-4\right)<0\forall t\in\left[-2;2\right]$

Chứng tỏ hàm số nghịc biến . Cho nên để f(x)=f(y-2) chỉ xảy ra khi : x=y-2 , thay vào (2) ta được :

$$(2)\Leftrightarrow 4x^2+2\sqrt{4-x^2}-5\sqrt{4\left(x+2\right)-\left(x+2\right)^2}+6=0\Leftrightarrow 4x^2+2\sqrt{4-x^2}-5\sqrt{4-x^2}+6=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+6=3\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{4-x^2}\ge 0\\ 4\left(4-t^2\right)+6=3t\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{4-x^2}\ge 0\\ 4t^2+3t-22=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{4-x^2}\ge 0\\ t=\frac{-3-19}{8}=-\frac{11}{4}<0; t=2\end{cases}$$

$\Rightarrow t=2\Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}=2\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=2\Leftrightarrow (x;y)=(0;2)$. Vậy hệ có nghiệm : (x;y)=(0;2)

Bài 16. Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} \sqrt{x^2+2}+\sqrt{y^2+3}+x+y=5\\ \sqrt{x^2+2}+\sqrt{y^2+3}-x-y=2\end{cases}$

Giải

$$.\begin{cases} \sqrt{x^2+2}+\sqrt{y^2+3}+x+y=5(1)\\ \sqrt{x^2+2}+\sqrt{y^2+3}-x-y=2(2)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+2}+x+\sqrt{y^2+3}+y=5(1)\\ \sqrt{x^2+2}-x+\sqrt{y^2+3}-y=2(2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}-x}+\dfrac{3}{\sqrt{y^2+3}-y}=5(1) \\ \sqrt{x^2+2}-x+\sqrt{y^2+3}-y=2(2) \end{cases}$$. Do : $\begin{cases} \left(\sqrt{x^2+2}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=2 \\ \left(\sqrt{y^2+3}+y\right)\left(\sqrt{y^2+3}-y\right)=3 \end{cases} \Rightarrow$

- Suy ra : $\sqrt{x^2+2}-x=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}+x};\sqrt{y^2+3}-y=\dfrac{3}{\sqrt{y^2+3}+y}$. Cho nên (1) chỉ xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2}-x=1 \\ \sqrt{y^2+3}-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+2}=x+1 \\ \sqrt{y^2+3}=y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2=x^2+2x+1 \\ y^2+3=y^2+2y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$$

- Vậy hệ có nghiệm duy nhất : (x;y)=($\dfrac{1}{2}$;1) .

Bài 17 . Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} x^2y^2-8x+y^2=0 \\ 2x^2-4x+10+y^3=0 \end{cases}$

Giải

Hệ : $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2-8x+y^2=0 \\ 2x^2-4x+10+y^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=\dfrac{8x}{x^2+1}\le\dfrac{8x}{2x}=4 \\ y^3+8=-2(x-1)^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\le y\le 2 \\ y\le -2 \end{cases} \Rightarrow y=-2$

Bài 18. Giải hệ: $\begin{cases} x^3-3x=\sqrt{(y-1)^3}-\sqrt{9(y-1)} \quad (1) \\ 1+\sqrt{x-1}=\sqrt{y-1} \quad (2) \end{cases}$

Giải

- Từ điều kiện và từ phương trình (2) có $x\ge 1;\sqrt{y-1}\ge 1$
- (1) $\Leftrightarrow x^3-3x=(\sqrt{y-1})^3-3\sqrt{y-1}$, xét hàm số $f(t)=t^3-3t$ trên $[1;+\infty)$
- Hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$, ta có $f(x)=f(\sqrt{y-1})\Rightarrow x=\sqrt{y-1}$
- Với $x=\sqrt{y-1}$ thay vào (2) giải được $x=1;\ x=2\ \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$

Bài 19 Giải hệ phương trình $\begin{cases} (4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0 \quad (1) \\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 \quad (2) \end{cases}$

Giải

(1) $\Leftrightarrow (4x^2+1)2x+(2y-6)\sqrt{5-2y}=0$

$$\Leftrightarrow \left[(2x)^2+1\right](2x)=\left[\left(\sqrt{5-2y}\right)^2+1\right]\sqrt{5-2y} \Leftrightarrow (2x)^3+2x=\left(\sqrt{5-2y}\right)^3+\sqrt{5-2y}$$

$\Leftrightarrow (2x)=f(\sqrt{5-2y})$ với $f(t)=t^3+t$. $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow (t)$ ĐB trên $\mathbb{R}$. Vậy

$$f(2x)=f(\sqrt{5-2y})\Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow y=\frac{5-4x^2}{2}, x\ge 0$$

Thế vào pt (2) ta được $4x^2+\left(\dfrac{5-4x^2}{2}\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7=0\Leftrightarrow g(x)=0$

Với $g(x) = 4x^2 + \left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} - 7, x \in \left[0; \frac{3}{4}\right]$. CM hàm g(x) nghịch biến.

Ta có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2$

Bài 20. *(Thử ĐT 2012)* Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 & (1) \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 & (2) \end{cases}$.

Giải

TH1 : Xét $y = 0$ thay vào hệ thấy không thỏa mãn.

TH2 : Xét $y \neq 0$, chia 2 vế của (1) cho y^5 ta được $(\frac{x}{y})^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y$ (3)

Xét hàm số $f(t) = t^5 + t \Rightarrow f'(t) = 5t^4 + 1 > 0$ nên hàm số đồng biến.

Từ $(3) \Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{y} = y \Rightarrow x = y^2$

Thay vào (2) ta có PT $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6 \Rightarrow x = 1$. Vậy hệ có nghiệm $(x;y) = (1;1)$

Bài 21. *(Thi thử ĐT 2013)* Giải hệ : $\begin{cases} (2x^2 - 3x + 4)(2y^2 - 3y + 4) = 18 \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Giải

(2) $\Leftrightarrow x^2 + (y-7)x + y^2 - 6y + 14 = 0$. $\exists x \Leftrightarrow \Delta_x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \frac{7}{3}$

(2) $\Leftrightarrow y^2 + (x-6)y + x^2 - 7x + 14 = 0$. $\exists y \Leftrightarrow \Delta_y \geq 0 \Rightarrow 2 \leq x \leq \frac{10}{3}$

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 - 3t + 4, t \in R \Rightarrow f'(t) = 4t - 3, f'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{4} < 1$

Vì vậy trên $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$ hàm số f(t) đồng biến

TH 1. $x > 2 \Rightarrow f(x) > f(2) = 6$ Kết hợp với $y \geq 1$

$\Rightarrow f(y) \geq f(1) = 3 \Rightarrow f(x).f(y) = (2x^2 - 3x + 4)(2y^2 - 3y + 4) > 18$.

TH 2. $x = 2$ hệ trở thành $\begin{cases} 2y^2 - 3y + 1 = 0 \\ y^2 - 4y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, y = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}$ vô nghiệm

Vậy hệ đã cho vô nghiệm

Bài 22. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} y^3 + 3y^2 + y + 4x^2 - 22x + 21 = (2x+1)\sqrt{2x-1} \\ 2x^2 - 11x + 9 = 2y \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \geq \frac{1}{2}$. Nhân hai vế của (2) với 2 sau đó lấy (1) trừ cho nó ta có hệ :

$$\begin{cases} y^3+3y^2+y+4x^2-22x+21=(2x-1+2)\sqrt{2x-1} \\ 4x^2-22x+18=4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3+3y^2+y+3=\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+2\sqrt{2x-1}-4y \\ 4x^2-22x+18=4y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(y^3+3y^2+3y+1\right)+(2+2y)=\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+2\sqrt{2x-1} \\ 4x^2-22x+18=4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+1)^3+2(y+1)=\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+2\sqrt{2x-1} \\ 4x^2-22x+18=4y \end{cases}$$

Xét hàm số : $f(t)=t^3+2t \Rightarrow f'(t)=3t^2+2>0\ \forall t\in R$. Chứng tỏ hàm số đồng biến trên R

Để $f(y+1)=f\left(\sqrt{2x-1}\right)$ chỉ xảy ra khi : $y+1=\sqrt{2x-1}$ .. Thay vào (2) ta có :

$$2x^2-11x+9+2=2y+2 \Leftrightarrow 2x^2-11x+11=2(y+1) \Leftrightarrow 2x^2-11x+11=2\sqrt{2x-1} \quad (*)$$

Đặt $t=\sqrt{2x-1} \Rightarrow x=\dfrac{t^2+1}{2}>0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{t^2+1}{2}\right)^2-11\left(\dfrac{t^2+1}{2}\right)+11=2t$

$$\Leftrightarrow t^4+2t^2+1-11t^2-11+22=4t \Leftrightarrow t^4-9t^2-4t+12=0 \Leftrightarrow (t-1)(t-3)\left(t^2+4t+4\right)=0$$

Suy ra : Với $\begin{cases} t=1 \\ y+1=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1}=1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=(1;0)$

Với $\begin{cases} t=3 \\ y+1=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1}=3 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=9 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=(5;2)$

Vậy hệ có hai nghiệm : (x;y)=(1;0),(5;2) (ví $t^2+4t+4=(t+2)^2>0\ \forall t\geq 0$)

Bài 23. Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} x(x+y)+y^2=4x-1 \\ x(x+y)^2-2y^2=7x+2 \end{cases}$

Giải

Hệ : $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy+y^2+1=4x \\ x(x+y)^2-2y^2-2=7x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{y^2+1}{x}=4 \\ (x+y)^2-2\dfrac{y^2+1}{x}=7 \end{cases}$. Đặt : $\begin{cases} u=\dfrac{y^2+1}{x} \\ v=x+y \end{cases}$, thì hệ trở thành :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ v^2-2u=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4-v \\ v^2-2(4-v)-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4-v \\ v^2+2v+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1;v=3 \\ u=9;v=-5 \end{array}\right.$$

* Với : $\begin{cases} u=1 \\ v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2+1}{x}=1 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+1=x \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+y-2=0 \\ x=3-y \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=(2;1),(5;-2)$ * Với : $\begin{cases} u=9 \\ v=-5 \end{cases}$. Hệ vô nghiệm

<u>Câu 8</u> : (1điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\ln\left(\sqrt{y^2+1}-y\right) \\ x(x+1)=(2-y).\sqrt{y^2+2y+3} \end{cases}$ $(x,y\in R)$

<u>Câu 8</u>: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\ln\left(\sqrt{y^2+1}-y\right) & (1) \\ x(x+1)=(2-y).\sqrt{y^2+2y+3} & (2) \end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow x^3-\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-y^3+\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{y^2+1}+y}\right)$ Xét $f(t)=t^3-\ln\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)$, D = R **(0.25)**

$\Leftrightarrow x^3-\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=(-y)^3-\ln\left(\sqrt{(-y)^2+1}-(-y)\right)$

$f'(t)=3t^2+\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}>0,\forall t\in R$

$\Rightarrow$ f đồng biến trên R.

Vậy $(1)\Leftrightarrow f(x)=f(-y)\Leftrightarrow x=-y$ **(0.25)**

Thay vào (2) $\Rightarrow x^2+x=(x+2).\sqrt{x^2-2x+3}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2+x)(x+2)\ge 0\\(x^2+x)^2=(x^2-2x+3).(x+2)^2\end{cases}$ **(0.25)**

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2+x)(x+2)\ge 0\\x^2-2x-6=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{7}$

KL: nghiệm hpt: $(1+\sqrt{7};-1-\sqrt{7});(1-\sqrt{7};(-1+\sqrt{7})$ **(0.25)**

Câu 8 (0,75 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2\\12y^2-10y+2=2\sqrt[3]{x^3+1}\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

<table>
<tr><td>Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2\\12y^2-10y+2=2\sqrt[3]{x^3+1}\end{cases}$ $(x;y\in\mathbb{R})$.</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2 & (1)\\12y^2-10y+2=2\sqrt[3]{x^3+1} & (2)\end{cases}$
Ta có: $(1)\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+4}=\sqrt{(-2y)^2+4}+(-2y)$ (*).
Xét hàm số đặc trưng $f(t)=\sqrt{t^2+4}+t\Rightarrow f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}+1=\dfrac{t+\sqrt{t^2+4}}{\sqrt{t^2+4}}>\dfrac{t+|t|}{\sqrt{t^2+4}}\ge 0.$
Suy ra f(t) là hàm số đồng biến trên R. Từ (*) suy ra: $f(x)=f(-2y)\Rightarrow x=-2y$.</td></tr>
<tr><td>Thay vào phương trình (2) ta được:
$3x^2+5x+2=2\sqrt[3]{x^3+1}$
$\Leftrightarrow (x+1)^3+2(x+1)=(x^3+1)+2\sqrt[3]{x^3+1}$ (**)</td></tr>
<tr><td>Xét hàm số $g(t)=t^3+2t$ ta thấy g(t) đồng biến trên R nên từ (**) suy ra $x+1=\sqrt[3]{x^3+1}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$. Vậy hệ có hai nghiệm là $(-1;\dfrac{1}{2});\ (0;0)$.</td></tr>
</table>

Câu 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 7\sqrt{x+1}-1=y\left(\sqrt{x+1}+1\right) \\ (x+1)y^2+y\sqrt{x+1}=13x+12 \end{cases}$

Giải hệ: $\begin{cases} 7\sqrt{x+1}-1=y\left(\sqrt{x+1}+1\right) & (1) \\ (x+1)y^2+y\sqrt{x+1}=13x+12 & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $x\ge -1, x, y\in\mathbb{R}$

$PT(1)\Leftrightarrow (7-y)\sqrt{x+1}=y+1\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\dfrac{y+1}{7-y}$ (Do $y=7$ không là nghiệm của phương trình)

Thay $\sqrt{x+1}=\dfrac{y+1}{7-y}$ vào (2) ta được phương trình:

$y^2.\left(\dfrac{y+1}{7-y}\right)^2+y.\dfrac{y+1}{7-y}=13.\left(\dfrac{y+1}{7-y}\right)^2-1$

$\Leftrightarrow y^2(y+1)^2+y(y+1)(7-y)=13(y+1)^2-(7-y)^2$

$\Leftrightarrow y^4+y^3-5y^2-33y+36=0$

$\Leftrightarrow (y-1)(y-3)\left(y^2+5y+12\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=3 \end{array}\right.$

Với $y=1\Rightarrow x=-\dfrac{8}{9}$

Với $y=3\Rightarrow x=0$

Hệ phương trình có 2 nghiệm $(x;y)$ là $\left(-\dfrac{8}{9};1\right),(0;3)$.

Câu 9 *(1,0 điểm).* Giải hệ phương trình:

$\begin{cases} x-y\sqrt{2-x}+2y^2=2 \\ 2\left(\sqrt{x+2}-4y\right)+8\sqrt{y}\sqrt{xy+2y}= \end{cases}$

Ta kí hiệu các phương trình trong hệ như sau:

$\begin{cases} x-y\sqrt{2-x}+2y^2=2 \ (1) \\ 2\left(\sqrt{x+2}-4y\right)+8\sqrt{y}\sqrt{xy+2y}=34-15x \ (2) \end{cases}$

Điều kiện: $\begin{cases} -2\le x\le 2 \\ y\ge 0 \end{cases}$.

$(1)\Leftrightarrow 2-x+\sqrt{2-x}.y-2y^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2-x}=y \\ \sqrt{2-x}=-2y \end{array}\right.$.

+ Với $\sqrt{2-x}=y$ thay vào (2) ta được

$$2\left(\sqrt{x+2}-4\sqrt{2-x}\right)+8\sqrt{4-x^2}=34-15x \ (3).$$

Đặt $t=\sqrt{x+2}-4\sqrt{2-x}\Rightarrow t^2=34-15x-8\sqrt{4-x^2}$

Khi đó (3) trở thành $2t=t^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=2 \end{array}\right.$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2}-4\sqrt{2-x}=0 \\ \sqrt{x+2}-4\sqrt{2-x}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{30}{17}\Rightarrow y=\dfrac{2\sqrt{17}}{17} \\ x=2\Rightarrow y=0 \end{array}\right.$$

+ Với $\sqrt{2-x}=-2y$. Vì $y\ge 0\Rightarrow -2y\le 0$ mà $\sqrt{2-x}\ge 0$ nên chỉ

có thể xảy ra khi $x = 2$ và $y = 0$ thử vào (2) thấy thỏa mãn.

Kết luận: Hệ phương trình có hai nghiệm: $\begin{cases} x = \dfrac{30}{17} \\ y = \dfrac{2\sqrt{17}}{17} \end{cases}$

và $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$.

Câu 8 (1,0 *điểm*). Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy - y^2 + 2y - x - 1 = \sqrt{y-1} - \sqrt{x} \\ 3\sqrt{6-y} + 3\sqrt{2x+3y-7} = 2x + 7 \end{cases}$

Giải hệ phương trình …

Điều kiện: $x \geq 0, 1 \leq y \leq 6, 2x + 3y - 7 \geq 0$ (*)

Nhận thấy $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ không là nghiệm của hệ phương trình $\Rightarrow \sqrt{y-1} + \sqrt{x} \neq 0$

Khi đó, PT (1) $\Leftrightarrow x(y-1) - (y-1)^2 = \dfrac{y-1-x}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}$

$$\Leftrightarrow (y-1)(x-y+1) = \frac{y-1-x}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)\left(y-1+\frac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = x + 1 \text{ (do (*))}$$

Thay vào PT (2) ta được: $3\sqrt{5-x} + 3\sqrt{5x-4} = 2x + 7$ ĐK: $4/5 \leq x \leq 5$ (**)

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{5-x} - (7-x) + 3(\sqrt{5x-4} - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4+5x-x^2}{3\sqrt{5-x}+(7-x)} + \frac{3(-4+5x-x^2)}{\sqrt{5x-4}+x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-4+5x-x^2)\left(\frac{1}{3\sqrt{5-x}+(7-x)} + \frac{3}{\sqrt{5x-4}+x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 5x - 4 = 0 \text{ (do (**)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = 4 \Rightarrow y = 5 \end{array}\right. \text{ (thỏa mãn (*),(**))}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(1;2), (4;5)$.

Câu 8 (1.0 *điểm*). Giải hệ PT $\begin{cases} xy(x+1) = x^3 + y^2 + x - y \\ 3y\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right) + (4y+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right) = 0 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R}).$

Giải hệ PT $\begin{cases} xy(x+1) = x^3 + y^2 + x - y \\ 3y\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right) + (4y+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right) = 0 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R}).$

ĐKXĐ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $xy(x+1) = x^3 + y^2 + x - y \Leftrightarrow x^3 - x^2y + y^2 - xy + x - y = 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x^2-y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=x^2+1 \end{array}\right.$
Với $y=x^2+1$ thay vào PT thứ 2 ta được $3(x^2+1)\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x^2+6)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0$. Dễ thấy PT vô nghiệm. Với $y=x$ thay vào PT thứ 2 ta được $3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0$
$\Leftrightarrow 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=-(2x+1)\left(\sqrt{3+(2x+1)^2}+2\right)$ $\Leftrightarrow 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=(-2x-1)\left(\sqrt{3+(-2x-1)^2}+2\right)$ Xét hàm số $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+2}+2\right)$ ta có $f'(t)=\sqrt{t^2+2}+2+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}>0$ suy ra hàm số đồng biến.
Từ đó suy ra $3x=-2x-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{5}$. Vậy HPT có nghiệm $(x;y)=\left(-\dfrac{1}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$.

Câu 9 (1,0 *điểm*). Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+\dfrac{x}{x+1}=(y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \\ 3x^2-8x-3=4(x+1)\sqrt{y+1} \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Điều kiện: $\begin{cases} x>-1 \\ y\ge -1 \end{cases}$ $(1)\Leftrightarrow \dfrac{x^3+x^2+x}{x+1}=(y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \Leftrightarrow \dfrac{x^3+x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x+1}}=(y+2)\sqrt{y+1}$ $\Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3+\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=\left(\sqrt{y+1}\right)^3+\sqrt{y+1}$.
Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0\,\forall t\in\mathbb{R}$ suy ra *f(t)* đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên $f\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\right)=f\left(\sqrt{y+1}\right)\Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{y+1}$. Thay vào (2) ta được $3x^2-8x-3=4x\sqrt{x+1}$.

$\Leftrightarrow (2x-1)^2=\left(x+2\sqrt{x+1}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x+1}=x-1 \\ 2\sqrt{x+1}=1-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-6x-3=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\le \frac{1}{3} \\ 9x^2-10x-3=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+2\sqrt{3} \\ x=\frac{5-2\sqrt{13}}{9} \end{array}\right.$
Ta có $y=\frac{x^2}{x+1}-1$ Với $x=3+2\sqrt{3}\Rightarrow y=\frac{4+3\sqrt{3}}{2}$. Với $x=\frac{5-2\sqrt{13}}{9}\Rightarrow y=-\frac{41+7\sqrt{13}}{72}$. Các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện. KL: Hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=\left(3+2\sqrt{3};\frac{4+3\sqrt{3}}{2}\right)$ & $(x;y)=\left(\frac{5-2\sqrt{13}}{9};-\frac{41+7\sqrt{13}}{72}\right)$.

Bài 1. Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} x^2+y=y^2+x \\ 2^{x+y}-2^{x-1}=x-y \end{cases}$

Giải

. $\begin{cases} x^2+y=y^2+x \\ 2^{x+y}-2^{x-1}=x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y-1)=0 \\ 2^{x+y}-2^{x-1}=x-y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=0 \\ 2^{2x}-2^{x-1}=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=1 \\ 2-2^{x-1}=2x-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ 2^{2x}=2^{x-1} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=1 \\ 3-2x=2^{x-1} \end{cases} \end{array}\right.$

- Khi x=y , thì x=-1. Vậy nghiệm của hệ là : (x;y)=(-1;-1)
- Khi x+y=1 , (2) có nghiệm duy nhất : x=1 , do đó hệ có nghiệm : (x;y)=(1;0)

Chú ý : Tại sao ta không đưa chúng về dạng : $x^2-x=y^2-y$, sau đó xét hàm số $y=f(t)=t^2-t$?

Bài 2. Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}}+xy+\frac{3}{2}=2^y \quad (1) \\ \left(x^2y+2x\right)^2-2x^2y-4x+1=0\,(2) \end{cases}$

Giải

Từ (2) : $\Leftrightarrow \left(x^2y+2x\right)^2-2\left(x^2y+2x\right)+1=0 \Leftrightarrow \left[x^2y+2x-1\right]^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{1-2x}{x^2} \\ xy=\frac{1-2x}{x} \end{array}\right.(*)$

Thay vào phương trình (1): $\Leftrightarrow 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^{\frac{1-2x}{x^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$. Phương trình này đã biết cách giải ở phần phương pháp giải phương trình mũ .Phương trình có dạng :

$$b-a=\frac{1-x^2}{x^2}-\frac{1-2x}{x^2}=-1+\frac{2}{x}=-2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)\Rightarrow\frac{1}{2}-\frac{1}{x}=-\frac{b}{2}+\frac{a}{2}$$

Do đó phương trình trở thành : $2^b-2^a=-\frac{b}{2}+\frac{a}{2}\Leftrightarrow 2^b+\frac{b}{2}=2^a+\frac{a}{2}$

Xét hàm số : $f(t)=2^t+\frac{t}{2}\Rightarrow f'(t)=2^t\ln 2+\frac{1}{2}>0\forall t\in R$ suy ra hàm f(t) đồng biến trên R . Do vậy để xảy ra f(b)=f(a) chỉ xảy ra khi a=b : $\Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x^2}=\frac{1-2x}{x^2}\Leftrightarrow 1-x^2=1-2x$

$\Leftrightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x=2$ (vì x khác 0) và $y=\frac{1-2.2}{4}=-\frac{3}{4}\Rightarrow(x;y)=\left(2;-\frac{3}{4}\right)$

Chú ý : Vì ta sử dụng được phương pháp hàm số vì a,b thuộc R

Bài 3. Giải hệ phương trình sau $\begin{cases}x^2-12xy+20y^2=0\\ \ln(1+x)-\ln(1+y)=x-y\end{cases}$

Giải

. $\begin{cases}x^2-12xy+20y^2=0\\ \ln(1+x)-\ln(1+y)=x-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2y)(x-10y)=0\\ \ln(1+x)-\ln(1+y)=x-y\end{cases}$

Từ (2) : $\ln(1+x)-(x+1)=\ln(1+y)-(y+1)\Leftrightarrow f(t)=\ln t-t;\ f'(t)=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t}(t>0)$.

Hàm số đồng biến với mọi tthuoocj (0;1) và nghịch biến trên khoảng t>1 đạt GTLN tại t=1

Cho nên ta phải sử dụng phương pháp " Phương trình tích "

- Nếu thay vào (2)

$:\Leftrightarrow\begin{cases}\text{x=2y}\\ \ln(1+2y)-\ln(1+y)=2y-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{x=2y}\\ \ln\left(\frac{1+2y}{1+y}\right)=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{x=2y}\\ \left(\frac{1+2y}{1+y}\right)=e^y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{x=2y}\\ \frac{1}{1+y}=2-e^y\end{cases},$

Xét hàm số : $f(y)=\frac{1}{1+y}+e^y\Rightarrow f'(y)=-\frac{1}{(1+y)^2}+e^y$ chỉ có nghiemj duy nhất : y=0

- Nếu : $\begin{cases}x=10y\\ x=y\end{cases}\Rightarrow(x;y)=(0;0)$. Tương tự như trên ta cũng có nghiệm y=0 .

Bài 4. Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases}x^3-3x^2=y^3-3y-2\\ \log_y\left(\frac{x-2}{y-1}\right)+\log_x\left(\frac{y-1}{x-2}\right)=(x-3)^2\end{cases}$

Giải

. $\begin{cases}x^3-3x^2=y^3-3y-2(1)\\ \log_y\left(\frac{x-2}{y-1}\right)+\log_x\left(\frac{y-1}{x-2}\right)=(x-3)^2(2)\end{cases}\Rightarrow(1)\Leftrightarrow x^3-3x^2+3x-1=y^3-3y+3x-3$

$$\Leftrightarrow(x-1)^3=y^3-3y+3(x-1)\Leftrightarrow(x-1)^3-3(x-1)=y^3-3y(*)$$

Đặt : x-1=t suy ra (*) trở thành : $t^3-y^3-3(t-y)=0 \Leftrightarrow (t-y)(t^2+ty+y^2-3)=0$

+/ Trường hợp chỉ khi : x-1=y, hay : x=y+1, x-2=y-1 . $\Leftrightarrow \frac{x-2}{y-1}=1$

Thay vào (2) ta có : $\log_y 1+\log_x 1=(x-3)^2 \Rightarrow (x-3)^2=0 \Leftrightarrow x=3$. Do đó nghiệm của hệ phương trình là : (x;y)=(3;2).

+/ Trường hợp : $t^2+ty+y^2-3=0 \Leftrightarrow (x-2+1)^2+(x-2+1)y+y^2-3=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(2+y)(x-2)+y^2+y-2=0$

Bài 5 Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases}2x^2y+y^3=2x^4+x^6\\(x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2\end{cases}$

Giải

. $\begin{cases}2x^2y+y^3=2x^4+x^6\\(x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2(y-x^2)+y^3-(x^2)^3=0\\(x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(y-x^2)(2x^2+y^2+yx^2+x^4)=0\\(x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2\end{cases}$

-Trường hợp 1: y= x^2, thay vào (2) : $(x+2)\sqrt{x^2+1}=(x^2+1+2x) \Leftrightarrow t^2-(x+2)t+2x=0 \Rightarrow t=2; t=x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+1}=2 \Rightarrow x^2=3 \leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}\\ \sqrt{x^2+1}=x \Rightarrow x\in\varnothing\end{array}\right.$$.

-Trường hợp : $2x^2+y^2+yx^2+x^4=0 \Leftrightarrow y^2+\text{y}x^2+(2x^2+x^4)=0$

$\Rightarrow \Delta_y=x^4-4(2x^2+x^4)=-3x^4-8x^2<0 \vee x\in R \to \Delta_y<0$

$\Rightarrow f(,y)=2x^2+y^2+yx^2+x^4>0 \vee x,y$. Phương trình vô nghiệm .

Do đó hệ có hai nghiệm : (x;y)=$(-\sqrt{3};3),(\sqrt{3};3)$

**** Chú ý : Ta còn có cách giải khác***

- Phương trình (1) khi x=0 và y=0 không là nghiệm (do không thỏa mãn (2)).
- Chia 2 vế phương trình (1) cho $x^3\neq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^3=2x+x^3$
- Xét hàm số : $f(t)=2t+t^3 \Rightarrow f'(t)=2+3t^2>0 \forall t\in R$. Chứng tỏ hàm số f(t) đồng biến . Để phương trình có nghiệm thì chỉ xảy ra khi : $\frac{y}{x}=x \Leftrightarrow y=x^2$. Đến đây ta giải như ở phần trên

Bài 6. Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases}2+6y=\frac{x}{y}-\sqrt{x-2y}\\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2\end{cases}$.

Giải

$\begin{cases}2+6y=\frac{x}{y}-\sqrt{x-2y}\\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2y-y\sqrt{x-2y}-6y^2=0\\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\sqrt{x-2y}+2y)(\sqrt{x-2y}-3y)=0\\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2\end{cases}$

- Trường hợp 1: $\sqrt{x-2y}=-2y \Leftrightarrow \begin{cases}y\leq 0\\x-2y=4y^2\end{cases}$.

Thay vào (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x-2y}=4y^2+5y-2 \Leftrightarrow -2y=4y^2+5y-2 \Rightarrow 4y^2+7y-2=0$

- Trường hợp : $\sqrt{x-2y}=3y\Rightarrow\begin{cases}y\ge 0\\x-2y=9y^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 0\\x=9y^2+2y\end{cases}(*)$.

Thay vào (2) : $\Leftrightarrow\sqrt{9y^2+2y+3y}=9y^2+2y+3y-2\Leftrightarrow\sqrt{9y^2+5y}=9y^2+5y-2=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}t=\sqrt{9y^2+5y}\ge 0\\t^2-t-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=2\\\sqrt{9y^2+5y}=2\end{cases}\Rightarrow 9y^2+5y-4=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1\to x=9-2=7\\y=\frac{4}{9}\to 9\frac{16}{91}^2+2.\frac{4}{9}=\frac{264}{9}=\frac{88}{3}\end{array}\right.$

Vậy hệ có nghiệm : $(x;y)=(7;-1),\left(\frac{88}{3};\frac{4}{9}\right)$

Bài 7 Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases}x^2+y^2+\frac{2xy}{x+y}=1\\\sqrt{x+y}=x^2-y\end{cases}$

Giải

a. $\begin{cases}x^2+y^2+\frac{2xy}{x+y}=1(1)\\\sqrt{x+y}=x^2-y(2)\end{cases}$. Từ (2) viết lại : $\sqrt{x+y}+x+y=x^2+x\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+y}\right)^2+\sqrt{x+y}=x^2+x$

Ta xét hàm số f(t)=$t^2+t\,(t\ge 0)\Rightarrow f'(t)=2t+1>0\vee t\ge 0$. Chứng tỏ f(t) là một hàm số đồng biến , cho nên ta có : $\sqrt{x+y}=x\Leftrightarrow y=x^2-x$. (*)

Thay vào (1) : $\Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{2xy}{x^2}=1\Leftrightarrow x^2+\left(x^2-x\right)^2+\frac{2x\left(x^2-x\right)}{x^2}=1\Leftrightarrow x^2-1+x^2(x-1)^2+2(x-1)=0$

$\Leftrightarrow(x-1)\left(x+1+x^2(x-1)+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\x^3-x^2+x+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\(x+1)\left(x^2-2x+3\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.(**)$

Thay vào (*) : $\Leftrightarrow y=x^2-x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1;y=2\\x=1;y=0\end{array}\right.\Leftrightarrow(x;y)=(1;2),(1;0)$

Chú ý : Các em có nhận xét gì không khi tôi giải như trên . Bây giờ tôi nêu thêm hai cách nữa để các em kiểm nghiệm nhé :

Cách 2.

Đặt : $x+y=u;xy=v\Rightarrow(1)\Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{2xy}{x+y}=1\Leftrightarrow(x+y)^2-2xy+\frac{2xy}{x+y}=1$

$\Leftrightarrow u^2-2v+\frac{2v}{u}=1\Leftrightarrow u^3-u-2uv+2v=0\Leftrightarrow u\left(u^2-1\right)-2v(u-1)=0\Leftrightarrow(u-1)\left[u(u+1)-2v\right]=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=1\\u^2+u-2v=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y=1\\(x+y)^2+(x+y)-2xy=0\end{array}\right.$

* Nếu x+y=1 thay vào (2) ta được :

$1=x^2-(1-x)\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\leftrightarrow y=0\\x=-2\to y=3\end{array}\right.\Leftrightarrow(x;y)=(1;0),(-2;3)$

+/ Với $(x+y)^2+(x+y)-2xy=0\Leftrightarrow x^2+y^2+x+y=0$ vô nghiệm vì $\left(x^2+y^2>0;x+y\ge 0\right)$

Bài 8. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2^{x^2+1} - 4^{8y^2+\frac{1}{2}} = 3\left(2\sqrt{y} - \sqrt{x}\right) \\ 2^{(x+y)^2} + \dfrac{3}{2}\sqrt{x+y} = \dfrac{7}{2} \end{cases}$

Giải

Từ . $\begin{cases} 2^{x^2+1} - 4^{8y^2+\frac{1}{2}} = 3\left(2\sqrt{y} - \sqrt{x}\right) (1) \\ 2^{(x+y)^2} + \dfrac{3}{2}\sqrt{x+y} = \dfrac{7}{2} \qquad (2) \end{cases}$. - Điều kiện : $x, y \geq 0$

- Từ (1) : $\Leftrightarrow 2.2^{\left(\sqrt{x}\right)^4} + 3\sqrt{x} = 2.2^{\left(2\sqrt{y}\right)^4} + 3\left(2\sqrt{y}\right)$

- Xét hàm số : $f(t) = 2.t^4 + 3t\,(t \geq 0) \Rightarrow f'(t) = 8t^3 + 3 > 0$. Chứng tỏ f(t) luôn đồng biến .

Do vậy để phương trình (1) có nghiệm chỉ khi : $\sqrt{x} = 2\sqrt{y} \Leftrightarrow x = 4y \quad (*)$

- Thay vào (2) : $2^{\left(\sqrt{5y}\right)^4} + \dfrac{3}{2}\left(\sqrt{5y}\right) = \dfrac{7}{2}$. Xét hàm số : f(t)= $2^{t^4} + \dfrac{3}{2}t \Rightarrow f'(t) = 4t^3.2^{^4} + \dfrac{3}{2} > 0$.

- Nhận xét : f(1)=2+$\dfrac{3}{2} = \dfrac{7}{2}$. Suy ra t=1 là nghiệm duy nhất . $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ \sqrt{5y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{5} \\ x = \dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = \left(\dfrac{4}{5};\dfrac{1}{5}\right)$

Bài 9. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} e^{x-y} = \dfrac{\text{sinx}}{\text{siny}} \\ 3\sqrt{8x^2+3} + 1 = 6\sqrt{2y^2 - 2y + 1} + 8y \end{cases} \left(x \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

Giải

Từ :. $\begin{cases} e^{x-y} = \dfrac{\text{sinx}}{\text{siny}} \qquad (1) \\ 3\sqrt{8x^2+3} + 1 = 6\sqrt{2y^2 - 2y + 1} + 8y\,(2) \end{cases}$ $: x \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$

- Từ (1) : $\dfrac{e^x}{e^y} = \dfrac{\text{sinx}}{\text{siny}} \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{\text{sinx}} = \dfrac{e^y}{\sin y} \Rightarrow f(t) = \dfrac{e^t}{\sin t} \Leftrightarrow f'(t) = \dfrac{e^t\left(\sin t + \cos t\right)}{\sin^2 t} > 0 \forall t \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$

- Chứng tỏ hàm số f(t) luôn đồng biến . Phương trình có nghiệm khi x=y .

- Thay vào (2) : $3\sqrt{8x^2+3} + 1 = 6\sqrt{2x^2 - 2x + 1} + 8x \Leftrightarrow 3\sqrt{8x^2+3} + 1 - 6\sqrt{2x^2 - 2x + 1} = 8x - 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{9\left(8x^2+3\right) - 36\left(2x^2 - 2x + 1\right)}{3\sqrt{8x^2+3} + 6\sqrt{2x^2 - 2x + 1}} = 8x - 1 \Leftrightarrow \dfrac{9\left(8x-1\right)}{3\sqrt{8x^2+3} + 6\sqrt{2x^2 - 2x + 1}} = 8x - 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x - 1 = 0 \\ 3\sqrt{8x^2+3} + 6\sqrt{2x^2 - 2x + 1} = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{8} \\ \sqrt{8x^2+3} + 2\sqrt{2x^2 - 2x + 1} = 3 \end{array}\right.$

- Với $x = \dfrac{1}{8} \Rightarrow (x;y) = \left(\dfrac{1}{8};\dfrac{1}{8}\right)$.

- Ta có : với $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ suy ra $\left[\begin{array}{l} \sqrt{8x^2+3} \geq \sqrt{3} \\ 2\sqrt{2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}} \geq \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \sqrt{8x^2+3} + 2\sqrt{2x^2 - 2x + 1} > 3$

- Vậy hệ có nghiệm duy nhất : $(x;y)=\left(\frac{1}{8};\frac{1}{8}\right)$

Bài 10. Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1\\ x\sqrt{6x-2xy+1}=4xy+6x+1\end{cases}$

Giải

Từ :. $\begin{cases}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1\\ x\sqrt{6x-2xy+1}=4xy+6x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\left(-y+\sqrt{1+(-y)^2}\right)\\ x\sqrt{6x-2xy+1}=4xy+6x+1\end{cases}$. (nhân liên hợp)

Xét hàm số : $f(t)=t+\sqrt{1+t^2}\Rightarrow f'(t)=1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{t^2+1}}>\frac{|t|+t}{\sqrt{1+t^2}}\geq 0\forall t\in R$

Chứng tỏ hàm số đồng biến . Để f(x)=f(-y) chỉ xảy ra x=-y (*)

- Thay vào phương trình (2) :

$x\sqrt{6x+2x^2+1}=-4x^2+6x+1\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x^2+6x+1}-\frac{x}{2}\right)^2=\frac{25}{4}x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2+6x+1}=3x\\ \sqrt{2x^2+6x+1}=-2x\end{array}\right.$

* Trường hợp : $\sqrt{2x^2+6x+1}=3x\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ 2x^2+6x+1=9x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ 7x^2-6x-1=0\end{cases}\Rightarrow x=1;y=-1$

* Trường hợp : $\sqrt{2x^2+6x+1}=-2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 0\\ 2x^2+6x+1=4x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 0\\ 2x^2-6x-1=0\end{cases}$

$\rightarrow x=\frac{3-\sqrt{11}}{2};y=\frac{-3+\sqrt{11}}{2}$. Vậy hệ có hai nghiệm : (x;y)=(1;-1),($\frac{3-\sqrt{11}}{2};\frac{-3+\sqrt{11}}{2}$)

Bài 11. Giải hệ phwpng trình : $\begin{cases}\left(4x^2+1\right)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7\end{cases}$

Giải

Từ : . $\begin{cases}\left(4x^2+1\right)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0(1)\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7\qquad(2)\end{cases}$ (KA-2011)

- PT(1): $4x^3+x=-(y-3)\sqrt{5-2y}\,(3)$. Đặt $t=\sqrt{5-2y}\Rightarrow y=\frac{5-t^2}{2}\Leftrightarrow-\left(\frac{5-t^2}{2}-3\right)t=\frac{t^3+t}{2}$

- Khi đó (2) : $4x^3+x=\frac{t^3+t}{2}\Leftrightarrow(2x)^3+2x=t^3+t$

- Xét hàm số : f(u)=$u^3+u\Rightarrow f'(u)=3u^2+1>0\forall u$ suy ra f(u) luôn đồng biến . Do đó để f(x)=f(t) chỉ xảy ra khi : 2x=t $\Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow 4x^2=5-2y\Leftrightarrow 2y=5-4x^2\,(4)$

- Thay vào (2) : $g(x)=4x^2+\left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7=0\quad:x\in\left[0;\frac{3}{4}\right]$.Ta thấy x=0 và x=$\frac{3}{4}$ không là nghiệm . g'(x)=$8x-8x\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)-\frac{4}{\sqrt{3-4x}}=4x\left(4x^2-3\right)-\frac{4}{\sqrt{3-4x}}<0\forall x\in\left(0;\frac{3}{4}\right)$

- Mặt khác : $g\left(\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhấy , thay vào (4) tìm được y=2.

- Vậy hệ có nghiệm duy nhất : $(x;y)=\left(\frac{1}{2};2\right)$

Bài 12. Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases}2y^3+3xy^3=8\\x^3y-2y=6\end{cases}$

Giải :

- Đặt : $t=\frac{2}{y}\Rightarrow\Leftrightarrow\begin{cases}2+3x=t^3(1)\\x^3-2=3.t(2)\end{cases}$. Lấy (1) +(2) : $\Rightarrow x^3+3x=t^3+3t$

- Xét hàm số : $y=f(u)=u^3+3u\Rightarrow f'(u)=3u^2+3>0\forall u\in R$

- Chứng tỏ hàm số đồng biến . Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi : x=t

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{y}\\x^3y-2y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{y}\\\frac{8}{y^3}y-2y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{y}\\y^3+3y^2-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{y}\\(y-1)(y+2)^2=0\end{cases}$

- Vậy hệ có nghiệm : (2;1);(-1;-2)

Bài 13. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}2(2x+1)^3+2x+1=(2y-3)\sqrt{y-2}\\\sqrt{4x+2}+\sqrt{2y+4}=6\end{cases}$

Giải :

Từ :. $\begin{cases}2(2x+1)^3+2x+1=(2y-3)\sqrt{y-2}(1)\\\sqrt{4x+2}+\sqrt{2y+4}=6\qquad(2)\end{cases}$

- Điều kiện : $y\ge 2;x\ge-\frac{1}{2}(*)$

- Đặt : Từ (2) : $4x+2y+6=36\Leftrightarrow 2x+y=15\Rightarrow 2x+1=16-y$

- Từ (1):Đặt : $\sqrt{y-2}=t\Rightarrow y=t^2+2\Leftrightarrow 2y-3=2(t^2+2)-3=2t^2+1$

- Cho nên vế phải (1) : $\Leftrightarrow(2t^2+1)t=2t^3+t\Leftrightarrow(1):2(x+1)^3+(2x+1)=2t^3+t$

- Xét hàm số : $f(u)=2u^3+u\Rightarrow f'(u)=2u^2+1>0\forall u\in R$. Chứng tỏ hàm số luôn đồng biến . Để f(x)=f(t) chỉ xảy ra khi : x=t

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\sqrt{y-2}\\2x+y=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\sqrt{y-2}\\15-y=\sqrt{y-2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\le 15\\y^2-31y+227=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\frac{31-\sqrt{53}}{2}\\y=\frac{31+\sqrt{53}}{2}>15\end{array}\right.$

- Vậy hệ có nghiệm : $(x;y)=\left(\frac{\sqrt{53}-1}{4};\frac{31-\sqrt{53}}{2}\right)$

Bài 14 Giải hệ phương trình : $\begin{cases}2(x^3+2x-y-1)=x^2(y+1)(1)\\y^3+4x+1+\ln(y^2+2x)=0(2)\end{cases}$

Từ : . $\begin{cases}2(x^3+2x-y-1)=x^2(y+1)(1)\\y^3+4x+1+\ln(y^2+2x)=0(2)\end{cases}$

- Điều kiện : $y^2+2x>0(*)$

- Phương trình (1) : $\Leftrightarrow 2\left(x^3+2x\right)=2\left(y+1\right)+x^2\left(y+1\right)\Leftrightarrow 2x\left(x^2+2\right)=\left(y+1\right)\left(x^2+2\right)$
- Do : $x^2+2>0\Rightarrow 2x=y+1(**)$
- Thay vào (2) : $y^3+2\left(y+1\right)+1+\ln\left(y^2+y+1\right)=0\Leftrightarrow f\left(y\right)=y^3+2y+3+\ln\left(y^2+y+1\right)=0$
-Ta có : $f'\left(y\right)=3y^2+2+\dfrac{2y+1}{y^2+y+1}>0$. Chứng tỏ hàm số luôn đồng biến .
- Mặt khác : f(-1)=0 , do đó phương trình có nghiệm duy nhất : (x;y)=(0;-1)

Bài 15. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}(8x-3)\sqrt{2x-1}-y-4y^3=0\\4x^2-8x+2y^3+y^2-2y+3=0\end{cases}$

Giải

Từ : . $\begin{cases}(8x-3)\sqrt{2x-1}-y-4y^3=0 \quad (1)\\4x^2-8x+2y^3+y^2-2y+3=0(2)\end{cases}$

- Điều kiện : $x\ge\dfrac{1}{2}$.
- Từ (1) : $(8x-3)\sqrt{2x-1}=y+4y^3\,(*)$
- Đặt : $t=\sqrt{2x-1}\Rightarrow 2x=t^2+1\Leftrightarrow(8x-3)\sqrt{2x-1}=\left[4\left(t^2+1\right)-3\right]t=\left(4t^2+1\right)t=4t^3+t$
- Do đó (*) : $4t^3+t=4y^3+y$
- Xét hàm số : f(u)= $4u^3+u\Rightarrow f'\left(u\right)=12u^2+1>0\forall u\in R$. Chứng tỏ hàm số đồng biến . Do đó phương trình có nghiệm khi : f(t)=f(y) $\Leftrightarrow\sqrt{2x-1}=y\Leftrightarrow 2x=y^2+1(**)$
- Thay vào (2) : $\left(y^2+1\right)^2-4\left(y^2+1\right)+2y^3+y^2-2y+3=0\Leftrightarrow y^4+2y^3-y^2-2y=0$

$\Leftrightarrow y\left(y^3+2y^2-y-2\right)=0\Leftrightarrow y\left(y-1\right)\left(y^2+3y+2\right)=0\Leftrightarrow y\left(y-1\right)\left(y+2\right)\left(y+1\right)=0$

- Vậy : $\begin{cases}y=0\\2x=y^2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\x=\dfrac{1}{2}\end{cases}\rightarrow\left(x;y\right)=\left(\dfrac{1}{2};0\right),\begin{cases}y=0\\2x=y^2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=1\end{cases}\rightarrow\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$

$\begin{cases}y=-1\\2x=y^2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\x=1\end{cases}\rightarrow\left(x;y\right)=\left(1;0\right),\begin{cases}y=-2\\2x=y^2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2\\x=\dfrac{5}{2}\end{cases}\rightarrow\left(x;y\right)=\left(\dfrac{5}{2};-2\right)$

Bài 16. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}2^{\frac{1-x^2}{x^2}}-2^y=-xy-\dfrac{3}{2}\\\left(x^2y+2x\right)^2-2x^2y+1-4x=0\end{cases}$

Giải :

Từ : . $\begin{cases}2^{\frac{1-x^2}{x^2}}-2^y=-xy-\dfrac{3}{2} \qquad (1)\\\left(x^2y+2x\right)^2-2x^2y+1-4x=0(2)\end{cases}$

- Từ (2) : $\left(x^2y+2x\right)^2-2\left(x^2y+2x\right)+1=0\Leftrightarrow\left[\left(x^2y+2x\right)-1\right]^2=0\Rightarrow x^2y+2x=1\Leftrightarrow x^2y=1-2x$

- Hay : $\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{1-2x}{x^2}(*) \\ xy=\dfrac{1-2x}{x} \end{array}\right.$, thay vào (1) : $2^{\frac{1-x^2}{x^2}}-2^{\frac{1-2x}{x^2}}=-\left(\dfrac{1-2x}{x}\right)-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}$ (3)

- Nhận xét : $\dfrac{1-2x}{x^2}-\dfrac{1-x^2}{x^2}=\dfrac{x^2-2x}{x^2}=1-\dfrac{2}{x}=2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Gọi : $a=\dfrac{1-x^2}{x^2},b=\dfrac{1-2x}{x^2}\Rightarrow b-a=2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}\right)$

- Cho nên (3) $\Leftrightarrow 2^a-2^b=2(b-a)\Leftrightarrow 2^a+2a=2^b+2b$.

- Xét hàm số : f(t)= $2^t+2t\Rightarrow f'(t)=2^t\ln 2+2>0\forall t\in R$. Hàm số đồng biến , vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi : a=b , tức b-a=0 , hay : $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}=0\Leftrightarrow x=2$. Thay vào (*) ta tìm được

y= $-\dfrac{3}{4}\Rightarrow (x;y)=\left(2;-\dfrac{3}{4}\right)$

Bài 17.	Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\left(1+4^{2x-y}\right)5^{1-2x+y}=1+2^{2x-y+1} \\ y^3+4x+1+\ln\left(y^2+2x\right)=0\end{cases}$

Giải :

Từ : . $\begin{cases}\left(1+4^{2x-y}\right)5^{1-2x+y}=1+2^{2x-y+1}(1) \\ y^3+4x+1+\ln\left(y^2+2x\right)=0(2)\end{cases}$

- Phương trình (1) : $\Leftrightarrow \dfrac{\left(1+4^{2x-y}\right)5}{5^{2x-y}}=1+2.2^{2x-y}\Leftrightarrow 5+5.4^a=5^a+2.10^a\ (a=2x-y)$

$\Leftrightarrow 5^a+2.10^a-54^a=5\Leftrightarrow f(a)=\dfrac{1}{5}5^a+\dfrac{2}{5}10^a-4^a-1=0$

- Xét : $f'(a)=\dfrac{1}{5}5^a\ln 5+\dfrac{2}{5}10^a\ln 10-4^a\ln 4>0\left(\to\dfrac{2}{5}10^a\ln 10>10^a\ln 10>4^a\ln 4\right)$

- Chứng tỏ hàm số đồng biến . Mặt khác : f(1)=0 , đó cũng là nghiệm duy nhất của phương trình .

- Với a=1 suy ra 2x-y=1 , hay 2x=y+1 . Thay vào (2) : $\Rightarrow y^3+2(y+1)+\ln\left(y^2+y+1\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(y)=y^3+2y+2+\ln\left(y^2+y+1\right)=0\Rightarrow f'(y)=3y^2+2+\dfrac{2y+1}{y^2+y+1}(*)$

- Xét : $g(y)=\dfrac{2y+1}{y^2+y+1}\Rightarrow g'(y)=\dfrac{1-2\left(y^2+y\right)}{\left(y^2+y+1\right)^2}=\dfrac{\frac{3}{2}-2\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(y^2+y+1\right)^2}$

- Nhận xét : $\left[\begin{array}{l} y\ge -\dfrac{1}{2}\Rightarrow f'(y)>0 \\ y<-\dfrac{1}{2}\Rightarrow g'(y)>0\leftrightarrow g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0\to f'(y)>0\end{array}\right.\Leftrightarrow f'(y)>0\forall y\in R$

- Chứng tỏ f(y) đồng biến . Mặt khác f(-1)=0 suy ra y=-1 là nghiệm duy nhất của PT .

- Kết luận : hệ có nghiệm duy nhất (x;y)=(0;-1).

Bài 18 Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3-2y+1=0 \\ (3-x)\sqrt{2-x}-2y\sqrt{2y-1}=0 \end{cases}$

Giai

Đ/K : $x \le 2; y \ge \frac{1}{2}$.

Từ (2) $\left[1+(2-x)\right]\sqrt{2-x}=\left[1+(2y-1)\right]2y\sqrt{2y-1} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2-x}\right)^3+\sqrt{2-x}=\left(\sqrt{2y-1}\right)^3+\sqrt{2y-1}$

Ta xét hàm số : $f(t)=t^3+t \Rightarrow f'(t)=3t^2+1>0 \forall t \in R$. Chứng tỏ hàm số luôn đồng biến trên R

Do đó đẻ $f\left(\sqrt{2-x}\right)=f\left(\sqrt{2y-1}\right)$, chỉ xảy ra khi : $\sqrt{2-x}=\sqrt{2y-1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2y=3-x \\ x=3-2y \end{array}\right.$

Thay vào (1) $\Leftrightarrow x^3-(3-x)+1=0 \Leftrightarrow x^3+x-2=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+2\right)=0 \Rightarrow x=1; y=3-1=2$

Vậy hệ có nghiệm (x;y)=(1;2)

Bài 19. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} (x+y)^3+8xy=2(x+y)(8+xy) \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+y}}=\dfrac{1}{x^2-y} \end{cases}$ **(Ngô Trung Hiếu)**

Giải

Đ/K : $\begin{cases} x+y>0 \\ x^2-y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>0 \\ y<x^2 \end{cases} (*)$

Hệ $\begin{cases} (x+y)^3+8xy=2(x+y)(8+xy) \\ x^2-y=\sqrt{x+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3+8xy=2(x+y)(8+xy) \\ x^2+x=(y+x)+\sqrt{x+y} \end{cases}$

Từ (2) : $t=\sqrt{x+y}>0 \Rightarrow x^2+x=t^2+t \Leftrightarrow x^2-t^2+(x-t)=0 \Leftrightarrow (x-t)(x+t+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-t=0 \\ x+t+1=0 \end{array}\right.$

+/ **Trường hợp** : x=t $\Leftrightarrow \sqrt{x+y}=x \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2-x \\ x>0 \end{cases}$

thay vào (1) $x^6+8\left(x^2-x\right)x=2y^2\left[8+\left(x^2-x\right)x\right] \Leftrightarrow x^6+8x^3-8x^2=2x^2\left[8+x^3-x^2\right]$

$\Leftrightarrow x^6+8x^3-8x^2=16x^2+2x^5-2x^4 \Leftrightarrow x^6-2x^5+2x^4+8x^3-24x^2=0$

$\Leftrightarrow x^2\left(x^4-2x^3+2x^2+8x-24\right)=0 \Leftrightarrow x^2(x-2)(x+2)\left(x^2-2x+6\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \to y=2 \\ x=-2 \to y=6 \\ x^2-2x+6=0 \end{array}\right.$

Vậy hệ có nghiệm (x;y)=(2;2),(-2;6)

+/ Trường hợp : $x+1+\sqrt{x+y}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+y}=-(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ x+y=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ y=x^2+x+1 \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow (x+y)^3+8xy=16(x+y)+2xy(x+y) \Leftrightarrow (x+y)^3-16(x+y)+8xy-2xy(x+y)=0$

$\Leftrightarrow (x+y)^3-16(x+y)+2xy\left[4-2(x+y)\right]=0$

Thay vào (1) : $(x+1)^6+8x\left(x^2+x+1\right)=2(x+1)^2\left[8+x\left(x^2+x+1\right)\right]$

$(x+1)^6+8x\left(x^2+x+1\right)=2(x+1)^2\left[8+x\left(x^2+x+1\right)\right]$

Bài 20 . Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2y-2x^2-2y^2+5y-2=0 \\ \sqrt{y^2+1}+\sqrt{x-y}=2xy-x^2+\sqrt{x^2-2xy+y^2+1}+\sqrt{y} \end{cases}$

Giải

Đ/K : $x-y\ge 0; y\ge 0 \Leftrightarrow x\ge y\ge 0$

Từ (2) : $\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x-y}-y^2=-y^2+2xy-x^2+\sqrt{(x-y)^2+1}+\sqrt{y} \Leftrightarrow$

$\sqrt{y^2+1}-\sqrt{y}-y^2=+\sqrt{(x-y)^2+1}-\sqrt{x-y}-(x-y)^2$

Xét hàm số : $f(t)=\sqrt{t^2+1}-\sqrt{t}-t^2 \quad (t\ge 0)\Rightarrow f'(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}-\frac{1}{2\sqrt{t}}-2t=t\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}-2\right)-\frac{1}{2\sqrt{t}}<0$

(Vì : $\sqrt{t^2+1}\ge 1\Rightarrow 0\le \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\le 1\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}-2<0$ với mọi t>0)

Như vậy hệ có nghiệm chỉ xảy ra khi : $y=x-y$ hay x=2y .

Thay vào (1) : $(2y)^2y-2(2y)^2-2y^2+5y-2=0 \Leftrightarrow 4y^3-10y^2+5y-2=0$

$\Leftrightarrow (y-2)(4y^2-2y+1)=0 \Leftrightarrow y=2$ vì : $4y^2-2y+1=0$ vô nghiệm .

Vậy hệ có nghiệm : (x;y)=(4;2)

Bài 21. Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} 2(x-2)\sqrt{x+6}=6-y \\ (x-2)\sqrt{y+2}=\sqrt{y+1}.\sqrt{x^2-4x+5} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $y\ge -2; x\ge -6$

Từ (2) : $(x-2)\sqrt{y+2}=\sqrt{y+1}.\sqrt{x^2-4x+5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y+2}}{\sqrt{y+1}}=.\frac{\sqrt{(x-2)^2+1}}{(x-2)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y+2}{y+1}}=.\sqrt{\frac{(x-2)^2+1}{(x-2)^2}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(y+1)+1}{y+1}}=.\sqrt{\frac{(x-2)^2+1}{(x-2)^2}}$. Xét hàm số $f(t)=\sqrt{\frac{t+1}{t}} \quad (t>0)\Rightarrow f'(t)=\left(\sqrt{1+\frac{1}{t}}\right)'=-\frac{1}{2t^2\sqrt{1+\frac{1}{t}}}<0$.

Chứng tỏ hàm số nghịch biến

Để $f\left((x-2)^2\right)=f(y+1)$ chỉ xảy ra khi : $y+1=(x-2)^2$. Thay vào (1) ta được phương trình :

$(1)\Leftrightarrow (x-2)^2+2(x-2)\sqrt{x+6}-7=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=x-2\ge 0 \\ t^2+2t\sqrt{t+8}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=x-2\ge 0 \\ 2t\sqrt{t+8}=7-t^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t=x-2\le \sqrt{7} \\ 4t^2(t+8)=(7-t^2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t=x-2\le \sqrt{7} \\ t^4-4t^3-46t^2+49=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t=x-2\le \sqrt{7} \\ (t-1)(t^3-3t^2-49t-49)=0 \end{cases}$

+/ Trường hợp : t=1 hay x-2=1 suy ra x=3 và y+1=1 hay y=0 . Vậy nghiệm hệ là (x;y)=(3;0)

+/ Trường hợp : $f(t)=t^3-3t^2-49t-49=0\Rightarrow f'(t)=3t^2-6t-49=3(t-1)^2-52<0 \forall t\in\left[0;\sqrt{7}\right]$

Hàm số nghịch biến và f(o)= -49<0 chứng tỏ f(t)<0 với mọi $t\in\left[0;\sqrt{7}\right]$. Phương trình vô nghiệm .

Bài 22. Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} 2y(4y^2+3x^2)=x^4(x^2+3) \\ 2012^x\left(\sqrt{2y-2x+5}-x+1\right)=4024 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $2y-2x+5\geq 0$

+/ Nếu x=0 suy ra y=0 nhưng lại không thỏa mãn (2) vậy x khác 0 . Từ (1(chia hai vế cho $x^2\neq 0$

Khi đó :

$$(1)\Leftrightarrow \frac{2y\left(4y^2+3x^2\right)}{x^3}=\frac{x^4\left(x^2+3\right)}{x^3}\Leftrightarrow\left(\frac{2y}{x}\right)\left[\left(\frac{2y}{x}\right)^2+3\right]=x^3+3x\Leftrightarrow\left(\frac{2y}{x}\right)^3+3\left(\frac{2y}{x}\right)=x^3+3x$$

Xét hàm số : $f(t)=t^3+3t\Rightarrow f'(t)=3t^2+3>0$ với mọi t thuộc R . Chứng tỏ hàm số đồng biến

Để $f(\frac{2y}{x})=f(x)$, chỉ xảy ra khi : $\frac{2y}{x}=x\Leftrightarrow 2y=x^2$. Thay vào (2) ta được :

$$(2)\Leftrightarrow 2012^x\left(\sqrt{x^2-2x+5}-x+1\right)=4024\Leftrightarrow 2012.2012^{x-1}\left(\sqrt{(x-1)^2+4}-(x-1)\right)=4024$$

Lại đặt t=x-1 suy ra : $\Leftrightarrow 2012.2012^t\left(\sqrt{t^2+4}-t\right)=4024\Leftrightarrow g(t)=2012^t\left(\sqrt{t^2+4}-t\right)=2$

Lại xét hàm số : $g(t)=2012^t\left(\sqrt{t^2+4}-t\right)\Rightarrow g'(t)=2012^t\ln 2012\left(\sqrt{t^2+4}-t\right)+2012^t\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}-1\right)$

Hay : $g'(t)=2012^t\left(\sqrt{t^2+4}-t\right)\left[\ln 2012-\frac{1}{\sqrt{t^2+4}}\right]$

Vì : $\sqrt{t^2+4}-t>0$ và $\frac{1}{\sqrt{t^2+4}}<1<\ln 2012$ suy ra g'(t)>0 với mọi t thuộc R mà g(0)=2 cho nên với t=0 là nghiệm duy nhất và : $t=x-1=0\Rightarrow x=1;y=\frac{1}{2}\Leftrightarrow(x;y)=\left(1;\frac{1}{2}\right)$

Bài 23. Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases}x^3-12x-y^3+6y^2-16=0\\4x^2+2\sqrt{4-x^2}-5\sqrt{4y-y^2}+6=0\end{cases}$

Giải

Điều kiện : $-2\leq x\leq 2;0y\leq 4$. Khi đó hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-12x=(y-2)^3-12(y-2)\\4x^2+2\sqrt{4-x^2}-5\sqrt{4y-y^2}+6=0\end{cases}$

Xét hàm số $f(t)=t^3-12t\quad t\in[-2;2]\Rightarrow f'(t)=3t^2-12=3\left(t^2-4\right)<0\forall t\in[-2;2]$

Chứng tỏ hàm số nghịc biến . Cho nên để f(x)=f(y-2) chỉ xảy ra khi : x=y-2 , thay vào (2) ta được :

$$(2)\Leftrightarrow 4x^2+2\sqrt{4-x^2}-5\sqrt{4(x+2)-(x+2)^2}+6=0\Leftrightarrow 4x^2+2\sqrt{4-x^2}-5\sqrt{4-x^2}+6=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+6=3\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\sqrt{4-x^2}\geq 0\\4\left(4-t^2\right)+6=3t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\sqrt{4-x^2}\geq 0\\4t^2+3t-22=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\sqrt{4-x^2}\geq 0\\t=\frac{-3-19}{8}=-\frac{11}{4}<0;t=2\end{cases}$$

$\Rightarrow t=2\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=2\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=2\Leftrightarrow(x;y)=(0;2)$. Vậy hệ có nghiệm : (x;y)=(0;2)

Bài 24. Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases}\sqrt{x^2+2}+\sqrt{y^2+3}+x+y=5\\\sqrt{x^2+2}+\sqrt{y^2+3}-x-y=2\end{cases}$

Giải

$$.\begin{cases}\sqrt{x^2+2}+\sqrt{y^2+3}+x+y=5(1)\\\sqrt{x^2+2}+\sqrt{y^2+3}-x-y=2(2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+2}+x+\sqrt{y^2+3}+y=5(1)\\\sqrt{x^2+2}-x+\sqrt{y^2+3}-y=2(2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}-x}+\dfrac{3}{\sqrt{y^2+3}-y}=5(1) \\ \sqrt{x^2+2}-x+\sqrt{y^2+3}-y=2(2) \end{cases}$$. Do : $\begin{cases} \left(\sqrt{x^2+2}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=2 \\ \left(\sqrt{y^2+3}+y\right)\left(\sqrt{y^2+3}-y\right)=3 \end{cases} \Rightarrow$

- Suy ra : $\sqrt{x^2+2}-x=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}+x};\sqrt{y^2+3}-y=\dfrac{3}{\sqrt{y^2+3}+y}$. Cho nên (1) chỉ xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2}-x=1 \\ \sqrt{y^2+3}-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+2}=x+1 \\ \sqrt{y^2+3}=y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2=x^2+2x+1 \\ y^2+3=y^2+2y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=1 \end{cases}$$

- Vậy hệ có nghiệm duy nhất : (x;y)=($\dfrac{1}{2}$;1) .

Bài 25 . Giải hệ phương trình sau : $\begin{cases} x^2y^2-8x+y^2=0 \\ 2x^2-4x+10+y^3=0 \end{cases}$

Giải

Hệ : $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2-8x+y^2=0 \\ 2x^2-4x+10+y^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=\dfrac{8x}{x^2+1}\le\dfrac{8x}{2x}=4 \\ y^3+8=-2(x-1)^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\le y\le 2 \\ y\le -2 \end{cases} \Rightarrow y=-2$

Bài 26. Giải hệ: $\begin{cases} x^3-3x=\sqrt{(y-1)^3}-\sqrt{9(y-1)} & (1) \\ 1+\sqrt{x-1}=\sqrt{y-1} & (2) \end{cases}$

Giải

- Từ điều kiện và từ phương trình (2) có $x\ge 1;\sqrt{y-1}\ge 1$
- (1) $\Leftrightarrow x^3-3x=(\sqrt{y-1})^3-3\sqrt{y-1}$, xét hàm số $f(t)=t^3-3t$ trên $[1;+\infty)$
- Hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$, ta có $f(x)=f(\sqrt{y-1})\Rightarrow x=\sqrt{y-1}$
- Với $x=\sqrt{y-1}$ thay vào (2) giải được $x=1;\ x=2$ $\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$

Bài 27. *(A – 2010)* Giải hệ phương trình $\begin{cases} (4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0 & (1) \\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 & (2) \end{cases}$

Giải

(1) $\Leftrightarrow (4x^2+1)2x+(2y-6)\sqrt{5-2y}=0$

$\Leftrightarrow \left[(2x)^2+1\right](2x)=\left[\left(\sqrt{5-2y}\right)^2+1\right]\sqrt{5-2y} \Leftrightarrow (2x)^3+2x=\left(\sqrt{5-2y}\right)^3+\sqrt{5-2y}$

$\Leftrightarrow (2x)=f(\sqrt{5-2y})$ với $f(t)=t^3+t$. $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow(t)$ ĐB trên $\mathbb{R}$. Vậy

$f(2x)=f(\sqrt{5-2y})\Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow y=\dfrac{5-4x^2}{2}, x\ge 0$

Thế vào pt (2) ta được $4x^2+\left(\dfrac{5-4x^2}{2}\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7=0\Leftrightarrow g(x)=0$

Với $g(x)=4x^2+\left(\dfrac{5-4x^2}{2}\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7, x\in\left[0;\dfrac{3}{4}\right]$. CM hàm g(x) nghịch biến.

Ta có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=2$

Bài 28.*)* Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^5+xy^4=y^{10}+y^6 & (1) \\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y^2+8}=6 & (2) \end{cases}$.

Giải

TH1 : Xét $y=0$ thay vào hệ thây không thỏa mãn.

TH2 : Xét $y\neq 0$, chia 2 vế của (1) cho y^5 ta được $(\dfrac{x}{y})^5+\dfrac{x}{y}=y^5+y$ (3)

Xét hàm số $f(t)=t^5+t\Rightarrow f'(t)=5t^4+1>0$ nên hàm số đồng biến.

Từ $(3)\Rightarrow f(\dfrac{x}{y})=f(y)\Rightarrow \dfrac{x}{y}=y\Rightarrow x=y^2$

Thay vào (2) ta có PT $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+8}=6\Rightarrow x=1$. Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;1)$

Bài 29. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=3^y \\ y+\sqrt{y^2+1}=3^x \end{cases}$

Giải

Trừ vế hai pt ta được $x+\sqrt{x^2+1}-\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=3^y-3^x \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}+3^x=y+\sqrt{y^2+1}+3^y$

$f(x)=f(y)$ với $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}+3^t$. $f(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}+3^t\ln 3>0,\forall\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Bởi vậy $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$ thế vào pt thứ nhất ta được

$x+\sqrt{x^2+1}=3^x\Leftrightarrow 1=3^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\Leftrightarrow g(0)=g(x)$

Với $g(x)=3^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. $g'(x)=3^x\ln 3\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+3^x\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)$

$=3^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\ln 3-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ do $\sqrt{x^2+1}-x>0$ và $\sqrt{x^2+1}\geq 1$

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Bởi vậy $g(x)=g(0)\Leftrightarrow x=0$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất x = y = 0

Bài 30. *(Thi thử ĐT 2013)* Giải hệ : $\begin{cases} (2x^2-3x+4)(2y^2-3y+4)=18 \\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

Giải

(2) $\Leftrightarrow x^2+(y-7)x+y^2-6y+14=0$. $\exists x \Leftrightarrow \Delta_x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \frac{7}{3}$

(2) $\Leftrightarrow y^2+(x-6)y+x^2-7x+14=0$. $\exists y \Leftrightarrow \Delta_y \geq 0 \Rightarrow 2 \leq x \leq \frac{10}{3}$

Xét hàm số $f(t)=2t^2-3t+4, t\in R \Rightarrow f'(t)=4t-3, f'(t)=0 \Rightarrow t=\frac{3}{4}<1$

Vì vậy trên $\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$ hàm số f(t) đồng biến

TH 1. $x>2 \Rightarrow f(x)>f(2)=6$ Kết hợp với $y\geq 1$

$\Rightarrow f(y)\geq f(1)=3 \Rightarrow f(x).f(y)=(2x^2-3x+4)(2y^2-3y+4)>18$.

TH 2. $x=2$ hệ trở thành $\begin{cases}2y^2-3y+1=0\\ y^2-4y+4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1, y=\frac{1}{2}\\ y=2\end{cases}$ vô nghiệm

Vậy hệ đã cho vô nghiệm

Bài 31. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}y^3+3y^2+y+4x^2-22x+21=(2x+1)\sqrt{2x-1}\\ 2x^2-11x+9=2y\end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x\geq \frac{1}{2}$. Nhân hai vế của (2) với 2 sau đó lấy (1) trừ cho nó ta có hệ :

$\begin{cases}y^3+3y^2+y+4x^2-22x+21=(2x-1+2)\sqrt{2x-1}\\ 4x^2-22x+18=4y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^3+3y^2+y+3=\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+2\sqrt{2x-1}-4y\\ 4x^2-22x+18=4y\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(y^3+3y^2+3y+1\right)+(2+2y)=\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+2\sqrt{2x-1}\\ 4x^2-22x+18=4y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(y+1)^3+2(y+1)=\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+2\sqrt{2x-1}\\ 4x^2-22x+18=4y\end{cases}$

Xét hàm số : $f(t)=t^3+2t \Rightarrow f'(t)=3t^2+2>0\ \forall t\in R$. Chứng tỏ hàm số đồng biến trên R

Để $f(y+1)=f\left(\sqrt{2x-1}\right)$ chỉ xảy ra khi : $y+1=\sqrt{2x-1}$.. Thay vào (2) ta có :

$2x^2-11x+9+2=2y+2 \Leftrightarrow 2x^2-11x+11=2(y+1) \Leftrightarrow 2x^2-11x+11=2\sqrt{2x-1}$ (*)

Đặt $t=\sqrt{2x-1} \Rightarrow x=\frac{t^2+1}{2}>0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 2\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2-11\left(\frac{t^2+1}{2}\right)+11=2t$

$\Leftrightarrow t^4+2t^2+1-11t^2-11+22=4t \Leftrightarrow t^4-9t^2-4t+12=0 \Leftrightarrow (t-1)(t-3)\left(t^2+4t+4\right)=0$

Suy ra : Với $\begin{cases}t=1\\ y+1=t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2x-1}=1\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-1=1\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=(1;0)$

Với $\begin{cases}t=3\\ y+1=t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2x-1}=3\\ y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-1=9\\ y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\ y=2\end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=(5;2)$

Vậy hệ có hai nghiệm : (x;y)=(1;0),(5;2) (ví $t^2+4t+4=\left(t+2\right)^2>0\ \forall t\geq 0$)